MAT 498 Projektif Geometri Ara Sınavı(02.05.2021)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) Herhangi bir cisim kullanmaksızın, 16 noktalı bir afin düzlem kurunuz.

2.) İşlemleri aşağıdaki çizelgelerle verilen $GF(2) = \{0,1\}$ cismi yardımıyla tanımlanan afin düzlemlere ait bütün doğru ve noktaları bulunuz. $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ noktalarının hangi doğrular üzerinde olduğunu gösteriniz.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

3.) Öklid uzayında köşeleri A, B, C, D olan şekildeki dört yüzlüyü göz önüne alalım. $\mathcal{N}$ ile bu dört yüzlünün ABC, ABD, ADC ve DBC yüzlerinin(üçgenlerinin) kümesini; $\mathcal{D}$ ile de $AB, AC, AD, BC,$ BD ve CD ayrıtlarının(doğru parçalarının) kümesini gösterelim. $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ olmak üzere üzerinde bulunma bağıntısı

" $N \circ d \Leftrightarrow d, N$ nin bir kenarıdır " ile tanımlanmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir afin düzlem olup olmadığını araştırınız.

4.) Bir $\mathbb{A}$ Afin düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın daima var olduğunu ispatlayınız.

5.) Bir Afin düzleminde birbirine paralel doğrulardan oluşan herhangi iki kümenin aynı sayıda elemanı olduğunu ve bu sayının düzlemin mertebesine eşit olduğunu gösteriniz. Böyle $n + 1$ tane kümenin (paralel doğru demetinin) var olduğunu gösteriniz.

NOT: Süre 120 dakikadır. BAŞARILAR.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

Cevaplar

C-1 $\mathcal{A}$ afin düzleminde 16 nokta olması istendiğine göre $n^2=16 \Rightarrow n=4$ düzlemin mertebesidir.

Toplam doğru sayısı $=n^2+n$ den $4^2+4=20$ dir.

Bir afin düzlemde $(n+1)$-tane paralel doğru demeti vardır ve her demet afin düzlemin mertebesi kadar doğru içerir. Buna göre 16 noktalı afin düzlemde 5 tane paralel doğru demeti ve her demet 4 doğru içerir. Ayrıca her doğru 4 nokta kapsar.

$$\mathcal{N}=\{N_1, N_2, \dots, N_{16}\}, \quad \mathcal{D}=\{d_1, d_2, \dots, d_{20}\}.$$

Buna göre $d_1 // d_2 // d_3 // d_4$ olacak şekilde 1. grup paralel doğru demetini belirleyelim:

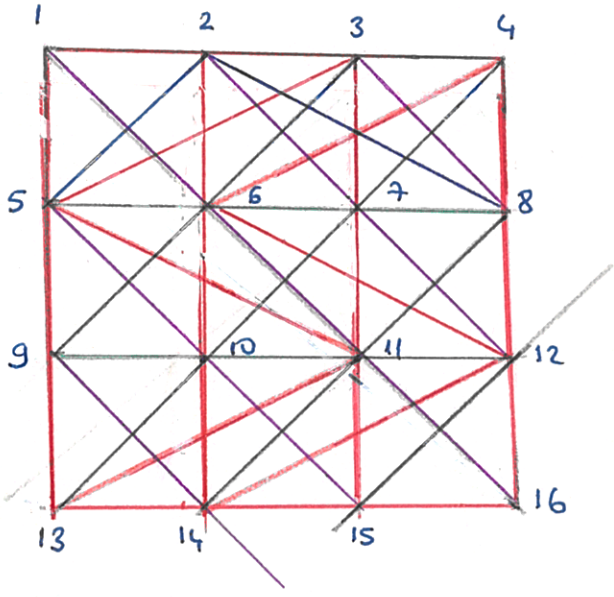
I. Grup
$$\begin{cases} d_1=\{N_1,N_2,N_3,N_4\} \\ d_2=\{N_5,N_6,N_7,N_8\} \\ d_3=\{N_9,N_{10},N_{11},N_{12}\} \\ d_4=\{N_{13},N_{14},N_{15},N_{16}\} \end{cases}$$

II. Grup
$$\begin{cases} d_5=\{N_1,N_5,N_9,N_{13}\} \\ d_6=\{N_2,N_6,N_{10},N_{14}\} \\ d_7=\{N_3,N_7,N_{11},N_{15}\} \\ d_8=\{N_4,N_8,N_{12},N_{16}\} \end{cases}$$

III. Grup
$$\begin{cases} d_9=\{N_1,N_6,N_{11},N_{16}\} \\ d_{10}=\{N_2,N_7,N_{12},N_{16}\} \\ d_{11}=\{N_5,N_{10},N_{15},N_4\} \\ d_{12}=\{N_3,N_8,N_9,N_{14}\} \end{cases}$$

IV. Grup
$$\begin{cases} d_{13}=\{N_4,N_7,N_{10},N_{13}\} \\ d_{14}=\{N_3,N_6,N_9,N_{16}\} \\ d_{15}=\{N_8,N_{11},N_{14},N_1\} \\ d_{16}=\{N_2,N_5,N_{12},N_{15}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{17}=\{N_1,N_7,N_9,N_{15}\} \\ d_{18}=\{N_2,N_8,N_{10},N_{16}\} \\ d_{19}=\{N_3,N_5,N_{11},N_{13}\} \\ d_{20}=\{N_4,N_6,N_{12},N_{14}\} \end{cases}$$



I. grup: x-eksenine paralel doğru demeti

II. grup: y-eksenine paralel doğru demeti

C-2)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Toplam nokta sayısı $n=2$ olduğundan n^2 den $2^2=4$ dır.

Toplam doğru sayısı n^2+2 den $2^2+2=6$ dır.

$\mathcal{N}=\mathbb{F}\times\mathbb{F}=\{0,1\}\times\{0,1\}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{F}\}$.

$\mathcal{D}=\{[m,b]\mid m,b\in\mathbb{F}\}\cup\{[a]\mid a\in\mathbb{F}\}=\{[0,0],[0,1],[1,0],[1,1]\}\cup\{[0],[1]\}$.

$\circ: (x,y)\circ[m,b]\Leftrightarrow y=mx+b,$

$(x,y)\circ[a]\Leftrightarrow x=a$ dır.

(i) $(0,0)\circ[m,b]\Leftrightarrow 0=m.0+b,\ (m=0,1),$

$m=0$ için $0=0.0+b\Rightarrow b=0,$

$m=1$ için $0=1.0+b\Rightarrow b=0$ dır. Buna göre,

$(0,0)\circ[0,0]$ ve $(0,0)\circ[1,0]$ dır.

$(0,0)\circ[x]\Leftrightarrow x=0\Rightarrow(0,0)\circ[0]$ dır. Buna göre, $(0,0)$ noktası $[0,0],[1,0],[0]$ doğruları üzerindedir.

(ii) $(0,1)\circ[m,b]\Leftrightarrow 1=m.0+b,\ (m=0,1),$

$m=0$ için $1=0.0+b\Rightarrow b=1$, $m=1$ için $1=1.0+b\Rightarrow b=1$, $(0,1)\circ[x]\Rightarrow x=0$.

Buna göre, $(0,1)$ noktası $[0,1],[1,1],[0]$ doğruları üzerindedir.

(iii) $(1,1)\circ[m,b]\Leftrightarrow 1=m.1+b,\ (m=0,1),$

$m=0$ için $1=0.1+b\Rightarrow b=1$, $m=1$ için $1=1.1+b\Rightarrow b=0$, $(1,1)\circ[x]\Leftrightarrow x=1$.

Buna göre, $(1,1)$ noktası $[0,1],[1,0],[1]$ doğruları üzerindedir.

(iv) $(1,0)\circ[m,b]\Leftrightarrow 0=m.1+b,\ (m=0,1),$

$m=0$ için $0=0.1+b\Rightarrow b=0$, $m=1$ için $0=1.1+b\Rightarrow b=1$, $(1,0)\circ[x]\Leftrightarrow x=1$ dir.

Buna göre, $(1,0)$ noktası $[0,0],[1,1],[1]$ doğruları üzerindedir.

Dolayısıyla $A_2\mathbb{F}$ afin düzleminin noktaları ve karşılarında da üzerinde bulundukları doğrular gösterilmiştir:

$(0,0)$: $[0,0],[1,0],[0]$

$(0,1)$: $[0,1],[1,1],[0]$

$(1,1)$: $[0,1],[1,0],[1]$

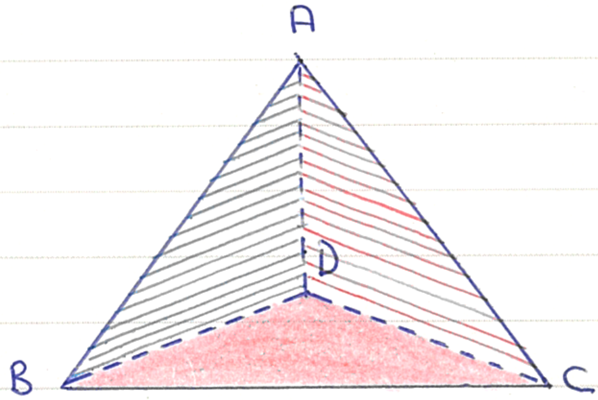
$(1,0)$: $[0,0],[1,1],[1]$

C-3) Öklid uzayında köşeleri A, B, C, D olan bir dört yüzlüyü gözönüne alalım. $\mathcal{N}$ ile bu dört yüzlünün ABC, ABD, ADC ve DBC yüzlerinin (üçgenlerinin) kümesini; $\mathcal{D}$ ile de AB, AC, AD, BC, BD ve CD ayrıtlarının (doğru parçalarının) kümesini gösterelim (Şekil 1).

$N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ olmak üzere üzerinde bulunma bağıntısını şöyle tanımlayalım:

$$N \circ d \iff d, \ N \text{ nin bir kenarıdır.}$$

Bu $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir Afin düzlem olduğunu gösterelim:



Şekil 1.

Farklı iki yüz ancak ve tam bir ayrıtı kenar kabul ederler. Dolayısıyla (A1) sağlanır.

Bir ayrıt ve bu ayrıtı kenar kabul etmeyen bir yüz için, bu yüzün kenarı olan ve verilen ayrıtla aynı yüze kenar olmayan bir tek ayrıt var olduğundan (A2) de sağlanır.

Aynı bir ayrıtı aynı anda kenar kabul etmeyen 3 yüz vardır. Dolayısıyla (A3) de sağlanır.

O halde, $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemi bir Afin düzlemdir.

Cevap Anahtarı

C-4) (A3) aksiyomu gereğince $\mathbb{A}$ da doğrudaş olmayan üç nokta vardır, bunlar $K, L, M \in \mathcal{N}$ olsun.

(A1) aksiyomu gereğince M ve L yi birleştiren ML doğrusu vardır ve K noktası ML üzerinde değildir. Yani, $K \notin ML$. Çünkü; K, L ve M yi doğrudaş olmayan üç nokta olarak seçtik.

$K \notin ML \overset{A2 \text{ den}}{\Longrightarrow} \exists\, k \in \mathcal{D} \ni K \circ k,\ k \parallel ML$ dir.

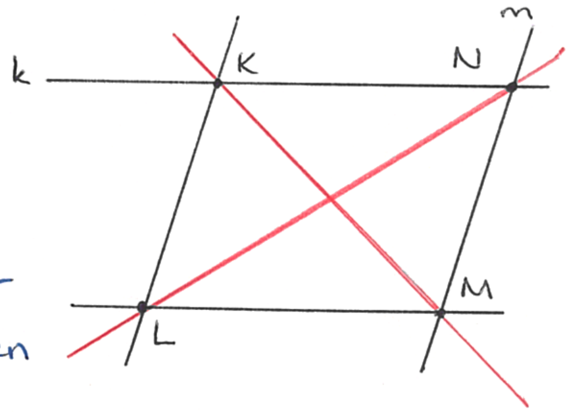
$M \notin KL \overset{A2 \text{ den}}{\Longrightarrow} \exists\, m \in \mathcal{D} \ni M \circ m,\ m \parallel KL$ dir. Ayrıca (A1) den $\exists\, KL \in \mathcal{D} \ni M \notin KL$ dir.

<u>İddia 1:</u> $k \neq m$ dir. Çünkü $k = m$ olsa idi $k = ML$ doğrusu ML ye paralel olamaz (çünkü M ortak). Halbuki $k \parallel ML$ almıştık. $k \nparallel m$ olur. Çünkü $k \parallel m$ olursa $KL \parallel m \parallel k \parallel ML$ olurdu ki bu da Teorem 2.2.4 ($\mathbb{A}$ Afin düzleminde $b, c, d \in \mathcal{D}$ için $b \parallel c$ ve $c \parallel d$ ise $b = d$ ya da $b \parallel d$ dir) gereğince $KL = ML$ veya $KL \parallel ML$ dir.

$KL = ML \Rightarrow K, L, M$ nin doğrudaş olması demektir. Bu ise hipoteze aykırıdır.

$KL \parallel ML \Rightarrow L \circ KL$ ve $L \circ ML$ olduğundan bu da mümkün değildir.

<u>İddia 2:</u> $k \neq m$ ve $k \nparallel m$ ise k ve m doğruları bir noktada kesişir. Yani, $\exists\, N \in \mathcal{N} \ni N = k \wedge m$ olacak şekilde 4.cü bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

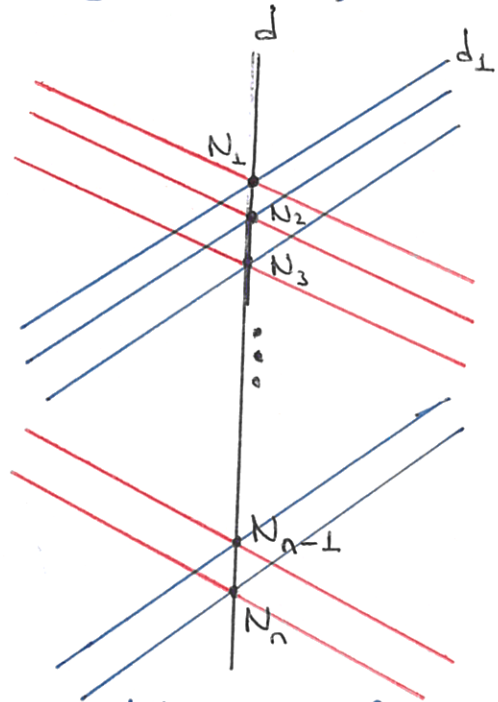


<u>Sonuç:</u> N noktası KL ye paralel olan m doğrusu üzerinde bulunduğundan $N \neq K$ ve $N \neq L$ dir. Benzer olarak N noktası k üzerinde bulunduğundan $N \neq M$ dir. Dolayısıyla N, istenen özellikteki 4. noktadır.

Cevap Anahtarı

C-5) d_1 ve d_2; farklı iki paralel demetine ait doğrular olsunlar. Bu durumda $d_1 \not\parallel d_2$ olup $d_1 d_2 = N_1$ olacak şekilde $N_1 \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

En küçük afin düzlemde bir noktadan 3 doğru geçtiğinden d_1 ve d_2 den farklı olarak N den geçen bir başka d doğrusu vardır. Bir doğru üzerinde (afin düzlemde bir doğru üzerinde) n-tane nokta bulunduğundan dolayı d doğrusu üzerinde n nokta vardır. Bu noktalar $N_1, N_2, \ldots, N_n$ olsun. (A2) aksiyomu gereğince $\forall N_i$ den geçen ve d_1'e paralel olan doğrular ile $\forall N_i$ den geçen ve d_2'ye paralel olan doğrular vardır. Böylece $\forall N_i$ sayesinde d_1 ve d_2'yi kapsayan paralel doğru demetleri arasında 1-1 ve örten bir fonksiyon kurulmuş olur.



Açıkça paralel doğru demetleri ayrıktır. Bir Afin düzlemde toplam n^2+n tane doğrunun var olduğunu biliyoruz. Her bir paralel doğru demetinde n tane doğru olduğundan

$$\frac{n^2+n}{n} = \frac{n(n+1)}{n} = n+1$$ tane paralel doğru demeti vardır.